线性代数的一些技巧

刘元彻
中国科学技术大学 University of Science and Technology of China

2021 年 12 月 3 日

目录

1 前言

本文档是作者在复习线性代数 (B1) 时制作的，能够为线性代数 (B1) 的复习提供一些帮助。文档中的内容大多是一些考试所需要使用的技巧，包括但不限于：

- 行列式的计算
- 矩阵分块和打洞的技巧
- 秩，和秩有关的恒等式、不等式
- 一些特殊形式的矩阵（幂零矩阵，幂等矩阵，主副对角矩阵等）
- 特征值的一些应用
- ……

以上内容参考了一些前人制作的复习资料，和一些知乎上的文档，以及《线性代数学习指导》（李尚志著），并在各种内容下附有一些事例。然而必须承认的是，这个文档当中的内容仅仅局限于一些技巧，因而更适合希望通过阅读这个文档来通过考试的同学，**几乎完全不适合**希望通过阅读这个文档来透彻学习理解线性代数的同学。所以如果有需要，还希望阅读一些优秀的线性代数教材（特别是美式教材，在线性代数的教材方面苏式教材普遍存在难以理解和灌定理的问题）。
希望这个文档能为正在准备考试的你提供有力的帮助。作者是使用 LaTeX 的萌新，可能在排版上存在一些问题（甚至于有大病），希望得到您的谅解，也欢迎您与我联系，和我交流。
个人主页：http://home.ustc.edu.cn/~liuyuanche，欢迎访问，在这里你也可以找到本文档的最新版和其他有用的内容。

2 行列式的计算

2.1 直接利用定义计算

ex.1 计算：$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & d_1 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 & e_2 \end{vmatrix}$

解：根据行列式的定义（利用逆序数的定义）可知，在后三行不能选出任意一个三项均不为 0 的元素相乘。因而该行列式显然为 0。

2.2 上三角转化：鸡爪型行列式

我们知道，对于上三角矩阵对应的行列式，主对角线元素之积恰为行列式的值，所以可以采用转化为上三角行列式的方法计算。

ex.2 计算（不妨假设 $a_i, b_i, x_i \neq 0$）：$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_2 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - a_2\frac{b_2}{x_2} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 - a_2\frac{b_2}{x_2} - a_3\frac{b_3}{x_3} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i\frac{b_i}{x_i} & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix}$$

消元的方法是把每一列分别加到第一列上去，消去第一列中除第一行以外的其他元素，且不会改变其他位置的 0。

即可按照上三角行列式的计算方法，直接得出 $\Delta = (x_1 - \sum\limits_{i=2}^{n} a_i \frac{b_i}{x_i}) \prod\limits_{j=2}^{n} x_j$

2.3 同行（同列相消）

借助消元法和行列式的定义，有一个显然的结论：如行列式存在两个相同行（列），则该行列式值为 0

2.4 拆行（拆列）

行列式具有关于某行或某列的线性性质，即 $|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i+\beta_i\cdots\alpha_n|$
$= |\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_i\cdots\alpha_n| |\alpha_1\alpha_2\cdots\beta_i\cdots\alpha_n|$，其中 α_i, β_i 是 n 个元素的列向量。

ex.3 证明 $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

解答：利用拆项的方法，$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c+a & a+b \\ q & r+p & p+q \\ y & z+x & x+y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & c+a & a+b \\ r & r+p & p+q \\ z & z+x & x+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} b & c+a & a \\ q & r+p & p \\ y & z+x & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & a & a+b \\ r & p & p+q \\ z & x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

其中，第一步利用了拆列，第二步利用初等列变换进行处理，第三步在初等列变换处理之后再调整顺序，得到结果

此题也可以用拆行的方法做。不赘述。

2.5 连加法：各行等和

ex.4 考虑如下形式的行列式：$\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$

观察发现每一行的和是相等的。此时不妨考虑将所有的**列**加到第一**列**，然后提取出第一**列**，可以简化行列式。

对于每一列和相等的情况是类似的。

$$\begin{vmatrix} x_1-a & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i-a & x_2 & \cdots & x_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i-a & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i-a & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i-a) \begin{vmatrix} 1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & x_2-a & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_2 & \cdots & x_n-a \end{vmatrix} = (\sum_{i=1}^{n} x_i-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a \end{vmatrix}$$

$$= (\sum_{i=1}^{n} x_i-a) * (-a)^{n-1}$$

2.6 整轮消去

循环消去法：行列式本身有循环性 有的行列式本身带有循环的性质，可以考虑用循环性进行循环消去：将第 2 行减去（加上）第 1 行，将第 3 行减去（加上）第 2 行（以此类推）。第 1 行（列）不做处理（也可以从最后一行倒着做，那么最后一行不做处理）

需要注意的是，这里进行循环时，每次减去（加上）的都是改变**之前**的行（列），否则会破坏首行（列）的循环性质。

滚动消去法：行列式具有堆叠性 区别于循环消去法，滚动消去法从一侧开始，将该行（列）叠加到上一行（列）中，然后利用**新的**行（列）继续进行滚动相消。注意，两种消去法都总共进行 $n-1$ 次消元，而不是 n 次。

以下例题同时利用了循环消去法和滚动消去法。

ex.5 计算：$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ddots & x_n-a_n \end{vmatrix}$

解答：利用循环性

$$\begin{vmatrix} x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \ddots & x_n-a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & a_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n-a_n \end{vmatrix}$$

此时我们注意到，上面的式子具有类似堆叠的性质，但是系数不同。可以考虑，对于整列调整倍数：

$$= \prod_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} -a_n & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_n & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n x_1}{a_1} & \frac{a_n x_2}{a_2} & \frac{a_n x_3}{a_3} & \cdots & \frac{a_n x_n}{a_n}-a_n \end{vmatrix}$$

然后进行从左向右滚动消元：

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_n & a_n & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n x_1}{a_1} & \frac{a_n x_1}{a_1}+\frac{a_n x_2}{a_2} & \frac{a_n x_3}{a_3} & \cdots \frac{a_n x_n}{a_n}-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n}{a_1}x_1 & \frac{a_n}{a_1}x_1+\frac{a_n}{a_2}x_2 & \frac{a_n}{a_1}x_1+\frac{a_n}{a_2}x_2+\frac{a_n}{a_3}x_3 & \cdots & \frac{a_n}{a_n}x_n-a_n \end{vmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} \begin{vmatrix} -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_n}{a_1}x_1 & \frac{a_n}{a_1}x_1+\frac{a_n}{a_2}x_2 & \frac{a_n}{a_1}x_1+\frac{a_n}{a_2}x_2+\frac{a_n}{a_3}x_3 & \cdots & \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i}x_i-a_n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n-1} a_i \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{a_i}x_i - a_n\right)$$

2.7 特殊行列式

Vandermonde 行列式 $\begin{vmatrix}a_{ij}\end{vmatrix}, a_{ij}=x_j^{i-1}$ 是 Vandermonde 行列式，其值为 $\prod\limits_{1\le i\le j\le n}(a_i-a_j)$

Hessenburg 行列式

2.8 加边法：用于配凑对称性

加边法可以提高行列式的维度。通常在行列式的边缘中添加一行一列。

添 0 加边 交叉元是一个常数（往往是 1），而行和列中，有一个全部为 0，另外一个可以任意指定（这样做的正确性可以通过直接展开显然地看出）。这样，任意指定的部分就可以用来配凑对称性。

ex.6 计算：$\varDelta=\begin{vmatrix}1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n\\ x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n\\ x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \cdots & x_3x_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}$

这是一种比较典型的斜对称行列式。我们不妨利用加边的方法进行转化：

$$\varDelta=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n\\ 0 & x_2x_1 & 1+x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n\\ 0 & x_3x_1 & x_3x_2 & 1+x_3^2 & \cdots & x_3x_n\\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & 1+x_n^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ -x_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ -x_2 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ -x_3 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -x_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}$$

第二步就利用将每一行同第一行进行消元转化。然后行列式变成了鸡爪型，此时可以套用 2.2 的结论进行进一步处理：

$$=\begin{vmatrix}1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2 & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n\\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{vmatrix}=1+\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2$$

对于这种填满的准三角行列式，往往是转化为鸡爪型，再进行一次消元转化为上三角。当

然，也可采取其他方法。

线性基加边 更高级的加边方法，将原本是 0 的地方改为插入一组线性基，最后提取特定基的分量求得原行列式。实际上，这种方式可以一次做出 n 个不同的行列式（但对于行列式形式的特殊性要求高）。

ex.7 计算：$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots 1 & & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$

3 分块和秩不等式

3.1 分块的一些基本原则

1. 分块加减：形式完全一致。
2. 分块数乘：形式完全一致。这使得我们常常用分块来讨论矩阵有关的线性空间。
3. 分块乘法：在满足乘法条件下进行，和一般矩阵乘法无差异。
4. 分块转置：外部形式上转置，同时内部所有块套上转置。$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} A^{\mathrm{T}} & C^{\mathrm{T}} \\ B^{\mathrm{T}} & D^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$
5. 分块求迹：一般没有这种操作。
6. 分块求逆：一般会写成 $\{A|I\}$ 然后像普通的矩阵一样进行消除，直到左边变为 I，则右边就是逆矩阵。
7. 分块矩阵行列式：注意，分块矩阵不能直接用分成的块套用行列式公式。

一些操作：分块矩阵也可进行初等变换，但是因为矩阵乘不同于数乘，所以会有一些限制：

左乘矩阵对应初等行变换，只能使矩阵作用在左边；右乘矩阵对应初等列变换，只能使矩阵作用在右边。

3.2 分块打洞证明基本的秩不等式

误区：矩阵相乘的秩不具有交换性，但他们的迹具有交换性：

也即：$\mathrm{rank}(AB) \neq \mathrm{rank}(BA), \mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

基本秩不等式 1：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} \geq \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

证明：

不妨设 $\mathrm{rank}(A) = s, \mathrm{rank}(B) = t$

则存在 s 阶子式 A_1，和 t 阶子式 B_1，使得 $\det A_1 \neq 0, \det B_1 \neq 0$，于是一定可以找出这样的行列式 $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix}$, 使得 $\det \begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ O & B_1 \end{vmatrix} = \det(A_1)\det(B_1) \neq 0$, 于是有原不等式成立。

基本秩不等式 2：$\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B)$

基本秩不等式 3：$\mathrm{rank}(AB) \leq \min\{\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B)\}$

简证：线性变换只能进行伸缩，旋转，投影。也就是说，只存在维度不变或维度降低的变换，而不存在升高维度的线性变换。故两个线性变换叠加作用，起变换矩阵的秩不会

超过最大的那个。

证明：

首先由基本秩不等式 1 知道 rank $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

又, 在这个矩阵中, 极大无关组只可能减少, 不可能增多, 故 rank $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

从而得到 rank $\begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix} = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$。

Frobenius 不等式：$\text{rank}(AC) + \text{rank}(CB) \leq \text{rank}(C) + \text{rank}(ACB)$

证明：

$\begin{pmatrix} C & O \\ O & ACB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & O \\ AC & ACB \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} C & -CB \\ AC & O \end{pmatrix}$

于是根据初等变换保秩性,应该有 rank $\begin{pmatrix} C & O \\ O & ACB \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} C & -CB \\ AC & O \end{pmatrix} \geq \text{rank}(AC) + \text{rank}(BC)$

特别地，令 $C = I_n$，可以推导出另一个重要的 Sylvester 不等式：$\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq n + \text{rank}(AB)$

加法不等式：$A, B \in \mathbf{F}^{a\times b}, \text{rank}(A+B) \leq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$

简证：相加后显然极大无关组只可能变小不可能变大。

拆项不等式：$\text{rank}(I - AB) \leq \text{rank}(I - A) + \text{rank}(I - B)$

证明：

$\text{rank}(I - AB) = \text{rank}(I - A + A - AB) \leq \text{rank}(I - A) + \text{rank}(A(I - B)) \leq \text{rank}(I - A) + \text{rank}(I - B)$

转置保秩性：$\text{rank}(A) = \text{rank}(A^{\mathrm{T}}) = \text{rank}(AA^{\mathrm{T}}) = \text{rank}(A^{\mathrm{T}}A)$